第 47 講　x の整式を求める

47　$f(x)$ を x の整式とする．次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ が

$$f(x^2)=x(x-1)^2f(x)+2x^4+8x^2-4x+4$$

を満たしているとき，$f(x)$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ が

$$f(x^2)=f(x^2-1)+(3x-6)f(x)+4x^2+6x+26$$

を満たしているとき，$f(x)$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第47講　x の整式を求める

47　整式 $f(x)$ について恒等式

$$f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$$

が成り立つとする．$f(x)$ を求めよ．

【選択肢】

㋐　$f(x)=x^3-3x^2+2x$　㋑　$f(x)=x^3+3x^2-2x$　㋒　$f(x)=x^3+3x^2+2x$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第47講　x の整式を求める

47　$f(x)$ を x の整式とする．次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ が

$$f(x^2)=x(x-1)^2f(x)+2x^4+8x^2-4x+4$$

を満たしているとき，$f(x)$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ が

$$f(x^2)=f(x^2-1)+(3x-6)f(x)+4x^2+6x+26$$

を満たしているとき，$f(x)$ を求めよ．

【答】　(1) $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$　(2) $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$

【解答】

(1)　$f(x)$ が定数関数であるとすると，左辺の $f(x^2)$ は定数関数，$x(x-1)2f(x)$ は3次以下，$2x^4+8x^2-4x+4$ は4次であるので，右辺は4次式となる．よって与式が成り立つことはない．

したがって $f(x)$ は1次以上の整式であるので，その次数を $n(\geqq 1)$ として $f(x)=ax^3+bx^3-1+\cdots\cdots(a\neq 0)$ と表すことができる．

このとき

$$(\text{左辺})=a(x^2)^n+b(x^2)^{n-1}+\cdots\cdots$$
$$=ax^{2n}+bx^{2n-2}+\cdots\cdots$$
$$(\text{右辺})=x(x-1)^2(ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots)+2x^4+8x^2-4x+4$$
$$=ax^{n+3}+(-2a+b)x^{n+2}+\cdots\cdots+2x^4+8x^2-4x+4$$

となる．

(Ⅰ)　$n=1$ のとき，$(\text{左辺})=ax^2+\cdots\cdots$，$(\text{右辺})=(a+2)x^4+\cdots\cdots$ となり最高次の係数が一致することはないので不適．

(Ⅱ)　$n\geqq 2$ のとき，$(\text{左辺})=ax^{2n}+\cdots\cdots$　で，$n+3>4$ より右辺の最高次の項は ax^{n+3} となるので，$2n=n+3$ より $n=3$　ゆえに $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ と表すことができる．

このとき

$$(\text{左辺})=ax^6+bx^4+cx^2+d$$
$$(\text{右辺})=x(x-1)^2(ax^3+bx^2+cx+d)+2x^4+8x^2-4x+4$$
$$=ax^6+(-2a+b)x^5+(a-2b+c+2)x^4+(b-2c+d)x^3$$
$$+(c-2d+8)x^2+(d-4)x+4$$

となることから，これらの式が x に関する恒等式になるので

$$0=-2a+b,\ b=a-2b+c+2,\ 0=b-2c+d,\ c=c-2d+8,\ 0=d-4,\ d=4$$

を得る．これらと $a\neq 0$ をすべて同時に満たすものは $a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$ となる．

以上より求める関数は $\boldsymbol{f(x)=x^3+2x^2+3x+4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　(Ⅰ)　$f(x)$ が定数関数であるとすると，左辺の $f(x^2)$ は定数関数，

$f(x^2-1)+(3x-6)f(x)$ は1次以下，$4x^2+6x+26$ は2次であるので，右辺は2次式となる．よって与式が成り立つことはない．

(Ⅱ)　$f(x)$ が1次関数，つまり $f(x)=ax+b(a\neq 0)$ のとき

$$(\text{左辺})=ax^2+b$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=a(x^2-1)+b+(3x-6)(ax+b)+4x^2+6x+26\\&=(4a+4)x^2+(-6a+3b+6)x+(-a-5b+26)\end{aligned}$$

となり，これらが x に関する恒等式になるので，

$a=4a+4$，$0=-6a+3b+6$，$b=-a-5b+26$ となるが，これらを同時に満たす a と b は存在しない．

(Ⅲ)　$f(x)$ が2次関数，つまり $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ のとき

$$(\text{左辺})=ax^4+bx^2+c$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\{a(x^2-1)^2+b(x^2-1)+c\}+(3x-6)(ax^2+bx+c)+4x^2+6x+26\\&=ax^4+3ax^3+(-8a+4b+4)x^2+(-6b+3c+6)x+(a-b-5c+26)\end{aligned}$$

となり，これらが x に関する恒等式になるが，x^3 の係数に注目すると $0=3a$ より $a=0$ となり $a\neq 0$ に矛盾．よって $f(x)$ が2次関数であることはない．

(Ⅳ)　$f(x)$ が3次関数，つまり $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　$(a\neq 0)$ のとき

$$(\text{左辺})=ax^6+bx^4+cx^2+d$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\{a(x^2-1)^3+b(x^2-1)^2+c(x^2-1)+d\}\\&\qquad+(3x-6)(ax^3+bx^2+cx+d)+4x^2+6x+26\\&=ax^6+bx^4+(-6a+3b)x^3+(3a-8b+4c+4)x^2\\&\qquad(-6c+3d+6)x+(-a+b-c-5d+26)\end{aligned}$$

となり，これらが x に関する恒等式になるので

$$0=-6a+3b,\ c=3a-8b+4c+4,\ 0=-6c+3d+6,\ d=-a+b-c-5d+26$$

を得る．これらと $a\neq 0$ を同時に満たすものは $a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$ となる．よって $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$

(Ⅴ)　$f(x)$ を4次以上の関数，つまり $n\geqq 4$ を満たす n を用いて

$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots$　$(a\neq 0)$ と表せるとき，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=a(x^2)^n+b(x^2)^{n-1}+\cdots\cdots\\&=ax^{2n}+bx^{2n-2}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\{a(x^2-1)^n+b(x^2-1)^{n-1}+\cdots\cdots\}+(3x-6)(ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots)\\&\qquad+4x^2+6x+26\\&=\{ax^{2n}+(-an+b)x^{2n-2}+\cdots\cdots\}+\{3ax^{n+1}+(-6a+3b)x^n+\cdots\cdots\}\\&\qquad+4x^2+6x+26\end{aligned}$$

となるが，$(2n-2)-(n+1)=n-3>0$，$(n+1)-2=n-1>0$ より，右辺を次数の高い項から順に並べると

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(右辺)$=ax^{2n}+(-an+b)x^{2n-2}+\cdots+3ax^{n+1}+\cdots\cdots$ となる.

　これが左辺と恒等的に等しいので，x^{2n-2} の係数に注目すると $b=-an+b$ より $an=0$ となるが，これは $a\neq0$，$n\geqq4$ に矛盾.

　よって $f(x)$ が 4 次以上の整式になることはない.

以上より求める関数は $\boldsymbol{f(x)=x^3+2x^2+3x+4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第47講　x の整式を求める

47　整式 $f(x)$ について恒等式

$$f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$$

が成り立つとする．$f(x)$ を求めよ．

【選択肢】

㋐　$f(x)=x^3-3x^2+2x$　　㋑　$f(x)=x^3+3x^2-2x$　　㋒　$f(x)=x^3+3x^2+2x$

【答】　㋐

【解答】

$f(x)$ が定数関数であるとすると，左辺の $f(x^2)$ は定数関数，$x^3f(x+1)$ は3次以下，$-2x^4+2x^2$ は4次であるので，右辺は4次式となる．よって与式が成り立つことはない．

したがって $f(x)$ は1次以上の整式であるので，その次数を $n\ (\geqq 1)$ として $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots$ $(a\neq 0)$ と表すことができる．このとき

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=a(x^2)^n+b(x^2)^{n-1}+\cdots\cdots\\&=ax^{2n}+bx^{2n-2}+\cdots\cdots\\(\text{右辺})&=x^3\{a(x+1)^n+b(x+1)^{n-1}+\cdots\cdots\}-2x^4+2x^2\\&=ax^{n+3}+(an+b)x^{n+2}+\cdots\cdots-2x^4+2x^2\end{aligned}$$

となる．

(Ⅰ)　$n=1$ のとき，(左辺)$=ax^2+\cdots\cdots$，(右辺)$=(a-2)x^4+\cdots\cdots$　となり最高次の係数が一致することはないので不適．

(Ⅱ)　$n\geqq 2$ のとき，(左辺)$=ax^{2n}+\cdots\cdots$　で，$n+3>4$ より，右辺の最高次の項は ax^{n+3} となるので，$2n=n+3$ より $n=3$　ゆえに $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ と表すことができる．

このとき

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=ax^6+bx^4+cx^2+d\\(\text{右辺})&=x^3\{a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d\}-2x^4+2x^2\\&=ax^6+(3a+b)x^5+(3a+2b+c-2)x^4+(a+b+c+d)x^3+2x^2\end{aligned}$$

となることより，$0=3a+b$，$b=3a+2b+c-2$，$0=a+b+c+d$，$c=2$，$0=d$ を得る．これらと $a\neq 0$ をすべて同時に満たすものは $a=1$，$b=-3$，$c=2$，$d=0$ となる．

以上より求める関数は $\boldsymbol{f(x)=x^3-3x^2+2x}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。